

## SOLUCIONES: EXAMEN ANÁLISIS

COMPLEJO 2º PARCIAL

14/1/2013

**1** Calcule, o justifique que no existe, el límite de la sucesión cuyo término general es

$$z_n = \frac{e^{in}}{(1+i)^{4n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{in}}{(1+i)^{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + i \sin n}{((1+i)^4)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos n}{(-4)^n} + i \frac{\sin n}{(-4)^n} \right)$$

$\uparrow$   
 $(1+i)^4 = -4$

$$= 0 + i0 = \boxed{0}$$

$\uparrow$   
 $\cos n$  acotada,  $\sin n$  acotada

$\frac{1}{(-4)^n}$  tiende a 0

• También se puede aplicar el mismo argumento que para las sucesiones de la parte real  $u_n = \operatorname{Re} z_n$  y de la parte imaginaria  $v_n = \operatorname{Im} z_n$ . Es decir,

$\{e^{in}\}$  acotada en módulo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{4n} = 0, \quad \text{pues} \quad \left| \frac{1}{1+i} \right| < 1 \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow \infty}} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{in} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{4n} = 0$$

• Otra forma más:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{in}}{(1+i)^{4n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^{4n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{in}}{(1+i)^{4n}} = 0$$

$$\uparrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

2] Dada la serie de Laurent  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{z-2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(z-2)^n}{3^n}$ , se pide:

a) Determinar su dominio de convergencia.

Se trata de una serie centrada en  $z_0=2$ , entonces el dominio de convergencia es:

$$C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-2| < R\}$$

donde:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

$\uparrow$   
 $b_n = (-1)^n \forall n$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3}} = \frac{1}{1/3} = 3$$

$\uparrow$   
 $a_n = \frac{n}{3^n} \forall n$

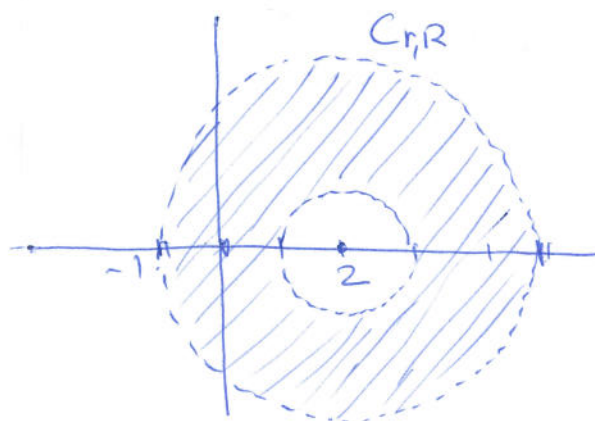
Luego, el dominio de la serie es:

$$C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 3\}$$

NOTA La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{z-2}\right)^n$  converge si  $|z-2| > r$  y la

serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(z-2)^n}{3^n}$  converge si  $|z-2| < R$ ; así la suma

de ambas series converge en la intersección de ambas regiones que es  $C_{r,R}$ .



b) Calcular la suma  $f(z)$  en el dominio de convergencia.

Utilizaremos la serie geométrica:  $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^n = \frac{c^{n_0}}{1-c}$  si  $|c| < 1$

Considerando  $c = \frac{-1}{z-2}$  entonces, si  $|\frac{-1}{z-2}| < 1$ , lo que equivale a  $|z-2| > 1$ , es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{z-2}\right)^n = \frac{\frac{-1}{z-2}}{1 - \left(-\frac{1}{z-2}\right)} = \frac{1}{1-z}$$

Análogamente, si  $c = \frac{z-2}{3}$ , entonces si  $|\frac{z-2}{3}| < 1$ , lo que equivale a  $|z-2| < 3$ , se verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-2}{3}} = \frac{1}{5-z}$$

Derivando:

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (z-2)^n = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{5-z} \right) \quad \text{si } |z-2| < 3,$$

luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} n (z-2)^{n-1} = \frac{1}{(5-z)^2} \quad \text{si } |z-2| < 3,$$

y multiplicando por  $z-2$ :

$$(z-2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (z-2)^{n-1} = \frac{z-2}{(5-z)^2} \quad \text{si } |z-2| < 3,$$

luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (z-2)^n}{3^n} = \frac{z-2}{(5-z)^2} \quad \text{si } |z-2| < 3$$

En consecuencia:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{z-2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n (z-2)^n}{3^n} = \frac{1}{1-z} + \frac{z-2}{(5-z)^2} \quad \text{si } 1 < |z-2| < 3}$$

3 Dada la función  $f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+2}$ , halle su desarrollo de Laurent en potencias de  $z$  en  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-i/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (i/z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}}$$

si  $|i/z| < 1$

Ahí, como  $|i/z| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$ , entonces:

$$\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} \quad \text{si } |z| > 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n}$$

$|-z/2| < 1$

Luego, como  $|-z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$ , entonces

$$\frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} \quad \text{si } |z| < 2. \quad (2)$$

En consecuencia; de (1) y (2)

$$\boxed{\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n}$$

si  $1 < |z| < 2$



**4** Dada la función  $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z - \pi}$ , se pide:

a) Hallar sus ceros y clasificarlos:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z \cdot (z - \pi)}$$

Como  $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; además  $f$  no es holomorfa en  $z = \pi$ , entonces:

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z} - \{1\}.$$

Es decir, el conjunto de ceros de  $f$  es:

$$C(f) = \{z_k = k\pi : k \in \mathbb{Z} - \{1\}\}$$

ORDEN DEL CERO  $z_k, k \in \mathbb{Z} - \{1\}$ :

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \cdot \frac{1}{z - \pi} + \operatorname{tg} z \cdot \frac{-1}{(z - \pi)^2}$$

$$f'(k\pi) = \underset{\substack{\uparrow \\ k \neq 1}}{\frac{1}{\cos^2(k\pi)}} \cdot \frac{1}{(k-1)\pi} \neq 0 \Rightarrow \boxed{z_k \text{ es un cero simple de } f \forall k \in \mathbb{Z} - \{1\}}$$

b) Como  $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$S(f) = \left\{ w_k = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\pi\}$$

CLASIFICACIÓN DE LA SINGULARIDAD  $w_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ :

Dado que  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  siendo  $p(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z - \pi}$ ,  $q(z) = \cos z$  y verificándose:

$$\left. \begin{aligned} p(w_k) &\neq 0 \\ q(w_k) &= 0 \\ q'(w_k) &= -\operatorname{sen} w_k \neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$w_k$  polo simple  $\forall k \in \mathbb{Z}$

CLASIFICACIÓN DE  $z_1 = \pi$ :

$$\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} z}{z - \pi} \stackrel{L'H}{=} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{z_1, \text{ singularidad evitable}}$$

CLASIFICACIÓN DEL PUNTO  $\infty$ : No se puede definir pues no es una singularidad aislada. pues  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \infty$ .

**5** Calcule la integral real impropia  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Se trata de una integral convergente entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1}$$

Consideremos la función de variable compleja  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  cuyas singularidades se hallan sobre la circunferencia unidad (con las raíces cuartas de  $-1$ ), y el contorno simple y positivamente orientado  $\Gamma_R = C_R \cup [R, R]$ , donde  $C_R$  es la semicircunferencia centrada en el origen y radio  $R$  situada en el semiplano superior, y siendo  $R > 1$ . Entonces:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz + \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx$$

|| ← Th. Cauchy de los residuos:

$$2\pi i \sum_{\substack{z_k \in S(f) \cap \text{int}(\Gamma_R)}} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

y tomando límites cuando  $R \rightarrow \infty$ , resulta:

$$2\pi i \sum_{z_k \in S(f) \cap \text{int}(\Gamma_R)} \operatorname{Res}(f, z_k) = \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

## CÁLCULO DE SINGULARIDADES Y RESIDUOS

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow z \in \{e^{(\pi+2k\pi)i/4} : k=0,1,2,3\}.$$

Por tanto,

$$S(f) \cap \text{int}(\Gamma_R) = \{z_1 = e^{\pi i/4}, z_2 = e^{3\pi i/4}\}.$$

Teniendo en cuenta que se puede expresar:

$$f(z) = \frac{P(z)}{q(z)} \quad \text{donde} \quad P(z) = 1 \quad \text{y} \quad q(z) = z^4 + 1,$$

entonces, dado que para  $k=1,2$  es  $\begin{cases} P(z_k) = 1 \\ q(z_k) = 0 \\ q'(z_k) = 4z_k^3 \neq 0 \end{cases}$ ,

los residuos en  $z_k, k=1,2$ , se pueden calcular de la siguiente forma

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{P(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

$\uparrow$   
 $z_k^4 = -1$

Por tanto:  $\text{Res}(f, z_1 = e^{\pi i/4}) = -\frac{e^{\pi i/4}}{4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$

$$\text{Res}(f, z_2 = e^{3\pi i/4}) = -\frac{e^{3\pi i/4}}{4} = -\frac{-1+i}{4\sqrt{2}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

En definitiva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left( -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) = 2\pi i \frac{-2i}{4\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

